Fonctions exponentielle et logarithme

Définitions

La fonction exponentielle est définie comme étant l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les deux conditions suivantes :

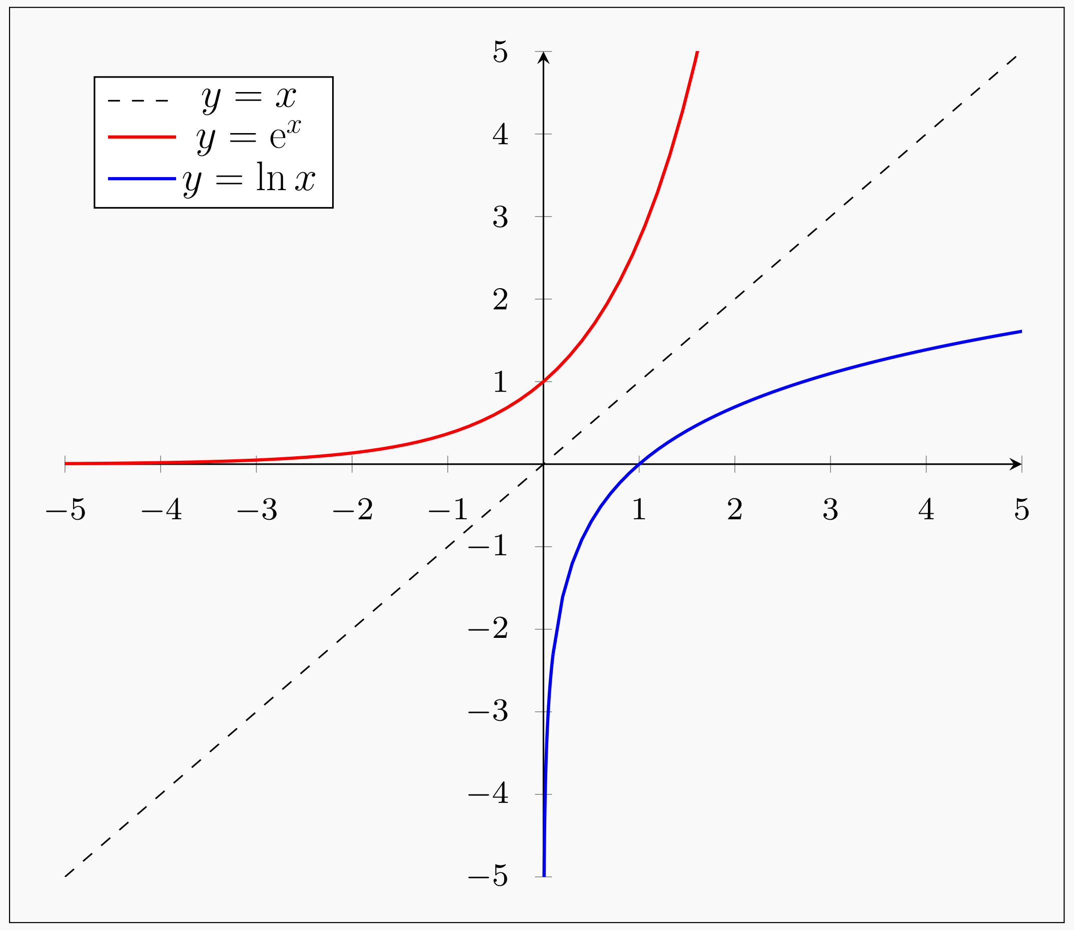
- $f(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x).$

On peut alors démontrer que cette fonction réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$, et on définit le logarithme naturel comme étant la bijection réciproque de cette application.

On a donc

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\mathrm{e}^x) = x$
- $\forall x \in]0; +\infty[,\ \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$

Fonctions exponentielle $x \longmapsto \mathrm{e}^x$



Fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$
Fonction $x \mapsto \ln x$ définie sur $]0; +\infty[$

Propriétés analytique de l'exponentielle

- $\exp(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) > 0$
- $x \longmapsto \exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
- $x \longmapsto \exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$

Propriétés analytique du logarithme naturel

- $\ln(1) = 0$
- $x \longmapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$
- $x \longmapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$

Propriétés algébrique de l'exponentielle

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{e}^x := \exp(x)$.
Pour tous réels x et y et tout entier n, on a

- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\sqrt{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{x/2}$
- $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \iff x = y$
- $\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^y \iff x \leq y$

Propriétés algébrique du logarithme naturel

Pour tous réels strictement positifs x et y et tout entier relatif n, on a

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$
- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$
- $\ln(x) = \ln(y) \iff x = y$
- $\ln(x) \leq \ln(y) \iff x \leq y$